ОКРУЖНА ТАКМИЧЕЊА-математика-8. разред (1996-2005)

1. Колико има парова природних бројева (x, y) таквих да је $3x+8y=1996$?
2. У координатној равни дата је права $4x+3y=n$, где је n неки реалан број. Нормално одстојање дате праве од координатног почетка је 12. Одредити број n и површину троугла који дата права гради са координатним осама.
3. Могу ли се бројеви 2, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^{1995}, 2^{1996} поделити у два скупа без заједничких елемената, тако да је збир бројева у једном скупу једнак збиру бројева у другом скупу? Зашто?
4. Из дате тачке M, ван датог круга $k(O,r)$ конструисана је сечица s која кружну линију сече у тачкама A и B. Израчунати обим и површину датог круга ако је $MA=16\,\mathrm{cm}$, $MB=9\,\mathrm{cm}$ и $MO=13\,\mathrm{cm}$.
5. Основа четворостране пирамиде је једнакокраки трапез чије су основице $a=5\,\mathrm{cm}$ и $b=3\,\mathrm{cm}$, а краци су $c=d=7\,\mathrm{cm}$. Израчунати запремину дате пирамиде ако висина пирамиде пада у пресек дијагонала трапеза, а већа бочна ивица је $13\,\mathrm{cm}$.
6. У координатној xOy равни дата је тачка $M(5,3)$. Кроз тачку M констрисана је права p која координатне осе сече у тачкама $A(a,0)$ и $B(0,b)$. Одредити све вредности a и b тако да су a и b природни бројеви.
7. Доказати да између два узастопна поклапања казаљки на сату увек прође једнако време. Одредити колико износи то време?
8. Одредити сва реална решења следеће једначине:
$$\frac{x}{1997}+\frac{x+1}{1998}=\frac{x+2}{1999}+\frac{x+3}{2000}$$
9. У правилној шестостраној пирамиди основна ивица једнака је висини пирамиде. Израчунај нормално растојање подножја висине пирамиде од бочне стране пирамиде, ако је основна ивица пирамиде $a=\sqrt{21}\,\mathrm{cm}$.
10. У правилном шестоуглу чија је страница $a=2\,\mathrm{cm}$ на случајан начин је распоређена 51 тачка, од којих су неке обојене плавом, а неке црвеном бојом. Доказати да без обзира на распоред тачака и њихову обојеност, увек постоје две тачке исте боје чије је растојање мање од $1\,\mathrm{cm}$.
11. У xOy координатној равни дата је права $4x+7y=1998$. Колико тачака на датој правој имају обе координате целобројне и припадају истом квадранту координатне равни?
12. У троугаоној форми, ред за редом, поређани су златници и сребрњаци: у првом реду 1 златник, у другом реду 2 сребрњака, у трећем реду три златника, у четвртом реду 4 сребрњака,... Колико има укупно сребрњака, ако је пребројано укупно 625 златника? Колико има могућих решења?
13. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ тако да је $AB+AD=10\,\mathrm{cm}$, $BC=CD$ и $\sphericalangle BCD=\sphericalangle BAD=90^\circ$. Израчунати површину датог четвороугла.
14. У једнакокраком трапезу $ABCD(AB||CD)$ основица $AB=12\,a$ и основица $CD=4\,a$. Тачке E и F су редом средишта основица CD и AB. Ако се праве AD и EF секу у тачки M, праве BE и CF секу у тачки N, израчунати дужину дужи MN у функцији од a.
15. Бочне стране ABS, BCS и CAS тростране пирамиде $ABCS$ су међусобно нормалне и имају редом површине $54\,\mathrm{cm}^2$, $96\,\mathrm{cm}^2$ и $72\,\mathrm{cm}^2$. Израчунати запремину пирамиде и мерне бројеве сваке од ивица пирамиде.
16. У координатној xOy равни дате су тачке $O(0,0)$, $M(3,4)$, $N(x,0)$. Одредити једначине правих OM и MN, ако је површина троугла OMN 14.
17. Израчунати површину и запремину правилне четворостране пирамиде чија је висина $17\,\mathrm{cm}$, а површина дијагоналног пресека $204\,\mathrm{cm}^2$.
18. Доказати да број чији декадни запис садржи једино цифре 2 и 6 није разлика квадрата два природна броја.
19. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ површине P. Доказати да је $AB\cdot BC+CD\cdot DA\geq 2P$.
20. Дата је шаковска табла 8×8 и три топа различите боје. На колико се начина могу разместити три топа тако да се они међусобно не "нападају". (Топови се "нападају"ако се налазе у истој хоризонтали или вертикали.)
21. Кифла кошта пола динара, погачица 2 динара, а ђеврек 5 динара. Да ли је могуће за тачно 100 динара купити тачно 100 пецива?
22. Одредити за које вредности реалног броја m једначина $\frac{mx}{2}-3=2(x-m)$ има негативно решење.
23. Нека је AB тетива датог круга $K(O,r=4\,\mathrm{cm})$ и нека је C подножје нормале из тачке A на тангенту круга у тачки B. Израчунати $AB^2:AC$.
24. Основна ивица правилне тростране пирамиде је дужине x, а бочна страна заклапа са равни основе угао од 60°. Одредити x, ако је мерни број површине пирамиде једнак мерном броју њене запремине.
25. Дванаест ученика улази у биоскопску салу у којој су места нумерисана и у којој су слободна само прва два реда са по 6 слободних места. Пет ученика жели да седи у првом реду, док је осталима свеједно где ће седети. На колико начина је могуће испунити жеље свим ученицима?
26. Тест се састоји од 20 задатака. Сваки тачно решен задатак ученику доноси 8 поена, сваки погрешно решен задатак-5 поена, а сваки задатак који није решаван 0 поена. По завршетку теста ученик је сакупио 13 поена. Колико задатака је ученик тачно, а колико погрешно решио?

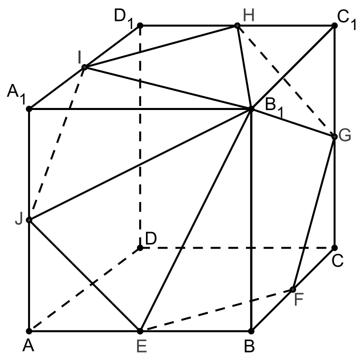
27. Дате су линеарне функције: $f(x) = (2m - 0{,}5)x - 3$ и $g(x) = (7m + 2)x - 4$. Одредити вредност реалног броја m тако да:
   а) графици функција буду паралелни;
   б) $f(x)$ буде опадајућа, а $g(x)$ растућа функција.

28. Из тачке A која је 120 m удаљена од подножја вертикалног торња BC, врх торња C се види под углом α. Из тачке D, која је за 90 m ближа подножју торња B, врх торња се види под углом $90° - \alpha$. Колика је висина торња?

29. Дата је тространа једнакоивична пирамида $SABC$. Нека је SS' висина пирамиде, а M средиште вицине SS'. Доказати да је $\sphericalangle AMB = 90°$.

30. Од 3 ученика шестог, 4 ученика седмог и 5 ученика осмог разреда треба формирати екипу од 4 члана коју чине тачно један ученик шестог разреда и бар један ученик седмог разреда. Колико има таквих екипа?

31. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивице дужине a. АКО су E, F, G, H, I, J средишта ивица $AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1, A_1A$ (види слику), наћи површину пирамиде са врхом B_1 и основом $EFGHIJ$.



32. Колико има четвороцифрених бројева чије су све цифре различите, а да се прва и последња цифра разликују за два?

33. Једначином $26|x| + 154|y| = 2002$ је у xOy-равни одређен један паралелограм. Наћи његову површину.

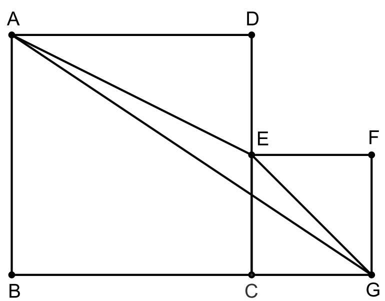
34. Доказати да је број $1999 \cdot 2000 \cdot 2001 \cdot 2003 \cdot 2004 \cdot 2005 + 36$ потпун квадрат.

35. Дат је квадрат $ABCD$. Тача E је средиште странице BC. Ако је тачка F на страници CD дата тако да је дуж EF нормална на AE, доказати да је $\sphericalangle EAB = \sphericalangle FAE$.

36. Ако је већи дијагонални пресекправилне шестостране призме квадрат, а мања дијагонала основе има дужину 10 cm, наћи запремину те призме.

37. Доказати да је $2003^{2003} - 2003$ дељиво са три.

38. Дати су квадрати $ABCD$ и $CGFE$ (види слику). Одредити површину троугла AGE ако је $EF = 10\,\text{cm}$.



39. На колико начина се у квадратиће могу распоредити бројеви 1,2,3,4 и 5 $\square > \square > \square < \square > \square$ (сваки број у један квадратић) тако да буду задовољене све неједнакости? Исписати сва решења.

40. Исписан је низ од 2003 цифре. Познато је да је сваки двоцифрени број који сачињавају две цифре у низу (тим редом којим су написане) дељив са 17 или са 23. Ако је последња цифра у низу 1, која је прва?

41. Колико је лима потребно за израду једног шупљег тела које чине омотачи две праве четворостране пирамиде са заједничком основом? Основа има облик правоугаоника са страницама 8 dm и 6 dm, а висине ових пирамида су по 12 dm.

42. Доказати да не постоје позитивни реални бројеви a, b и cтакви да је
$$a + \frac{1}{b} < 2, \quad b + \frac{1}{c} < 2, \quad c + \frac{1}{a} < 2.$$

43. У троуглу ABC конструисане су висине AA' и CC'. Ако је H ортоцентар, $AH = HA'$ и $CH : HC' = 2 : 1$,
(а) одредити $\sphericalangle ABC$; (б) доказати да је $AC : CC' = 4 : 3$.

44. У једном граду спроведена је анкета у којој је учествовало 20040 ученика који уче енглески или немачки језик (тачно један од њих). Од ученика који уче енглески језик, из непознатих разлога 20% је изјавило да учи немачки и, слично, 20% ученика који уче немачки у анкети је изјавило да уче енглески. По овој анкети 40% ученика у овом граду је изјавило да учи немачки језик. Колико ученика у овом граду учи енглески језик?

45. M и K су тачке на страницама AB и CD, редом, паралелограма $ABCD$, такве да је $AM = CK$, а P је произвољна тачка на страници AD. Нека је $\{E\} = MK \cap PB$ и $\{F\} = MK \cap PC$. Доказати да је:
(а) $P_{\triangle EPF} = P_{\triangle BME} + P_{\triangle CFK}$; (б) $P_{BCFE} = P_{APEM} + P_{PDKF}$.

46. Дата је функција $y = (2m + 1)x + 6$.
(а) Одреди вредности броја m тако да њен график садржи тачку $M(4, 3)$.
(б) За ту вредност броја m, одредити удаљеност координатног почетка од тог графика.

47. На страници AB троугла ABC уочена је тачка D. Нека су r, r_1 и r_2 редом дужине полупречника уписаних кружница у троуглове ABC, ADC и DBC. Доказати да је $r_1 + r_2 > r$.

48. Одредити просте бројеве p, q и r тако да важи $p + pq + pqr = 2005$.

49. Теме коцке удаљено је 2005 cm од дијагонале коцке. Наћи површину и запремину те коцке.